FO-21 / 20 Roll No. ....

Annual Examination, 2020

B.Sc. Part I (Old Course)

MATHEMATICS

Paper II

(Calculus)

Time : 3 Hours] [MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उन्हें उत्तर-पुस्तिका के प्रथम पृष्ठ पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है।

Note : *Section 'A' is Objective type and is compulsory. It should be written on the first page of answer book. Section B is Short answer type and Section C is Long answer type.*

खण्ड 'अ' (Section 'A') **10 × 1 = 10**

बहुविकल्पीय प्रश्न

(Multiple Choice Questions)

1. सही उत्तर चुनिए—

Choose the correct answer :

(i) माना $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0, f(0) = 0$, तो—

(अ) $f'(0) = 0$ (ब) $f'(0) = 1$

(स) $f'(0) = -1$ (द) $f'(0)$ का अस्तित्व नहीं है

P. T. O.

Let $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0, f(0) = 0$. Then :

(a) $f'(0) = 0$ (b) $f'(0) = 1$

(c) $f'(0) = -1$ (d) $f'(0)$ does not exist

(ii) वक्र $x^2y^2 = a^2 (x^2 + y^2)$ की X-अक्ष के समान्तर अनन्तस्पर्शियाँ हैं—

(अ) $y = \pm a$ (ब) $x = \pm a$

(स) $y = a$ (द) $x = a$

Asymptotes of the curve $x^2y^2 = a^2 (x^2 + y^2)$ parallel to X-axis is :

(a) $y = \pm a$ (b) $x = \pm a$

(c) $y = a$ (d) $x = a$

(iii) मैक्लॉरिन श्रेणी a^x के लिए है—

(अ) $1 + x \log_e a + \frac{x^2}{2!} (\log_e a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log_e a)^3 + \ldots\ldots$

(ब) $1 - x \log_e a + \frac{x^2}{2!} (\log_e a)^2 - \frac{x^3}{3!} (\log_e a)^3 + \ldots\ldots$

(स) $1 + x \log_e a + \frac{x^2}{2} (\log_e a)^2 + \frac{x^3}{3} (\log_e a)^3 + \ldots\ldots$

(द) इनमें से कोई नहीं

Maclaurin series of a^x is :

(a) $1 + x \log_e a + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\log_e a)^3 + \ldots\ldots$

(b) $1 - x \log_e a + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 - \frac{x^3}{3!}(\log_e a)^3 + \ldots\ldots$

(c) $1 + x \log_e a + \frac{x^2}{2}(\log_e a)^2 + \frac{x^3}{3}(\log_e a)^3 + \ldots\ldots$

(d) None of the above

(iv) चक्रज $S = 4a \sin \psi$ के बिन्दु (S, ψ) पर वक्रता त्रिज्या का मान है—

(अ) $4a$ (ब) $4a \sin \psi$

(स) $4a \cos \psi$ (द) इनमें से कोई नहीं

Value of radius of curvature of cycloid $S = 4a \sin \psi$ at point (S, ψ) is :

(a) $4a$ (b) $4a \sin \psi$

(c) $4a \cos \psi$ (d) None of the above

(v) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ का मान है—

(अ) $\tan^2 x$ (ब) $\frac{1}{3} \tan^3 x$

(स) $\frac{1}{2} \tan^2 x$ (द) इनमें से कोई नहीं

Value of $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ is :

(a) $\tan^2 x$ (b) $\frac{1}{3} \tan^3 x$

(c) $\frac{1}{2} \tan^2 x$ (d) None of the above

(vi) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx =$

(अ) $-\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ (ब) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$

(स) $-\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ (द) $\int_0^{\pi/2} \sin^{-n} x \, dx$

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx =$

(a) $-\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$

(c) $-\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ (d) $\int_0^{\pi/2} \sin^{-n} x \, dx$

(vii) एक गोलीय खण्ड की ऊँचाई h तथा त्रिज्या a हो, तो वक्रपृष्ठ होगा—

(अ) πah (ब) $2\pi ah$ (स) πah^2 (द) $2\pi ah^2$

A circular section of height h and radius a, then surface area is :

(a) πah (b) $2\pi ah$ (c) πah^2 (d) $2\pi ah^2$

(viii) अवकल समीकरण $Mdx = Ndy = 0$ के यथातथ होने का प्रतिबन्ध है—

(अ) $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ (ब) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(स) $\frac{\partial M}{\partial y} = 2\frac{\partial N}{\partial x}$ (द) $2\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Condition for the differential equation $Mdx = Ndy = 0$ is exact :

(a) $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ (b) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(c) $\frac{\partial M}{\partial y} = 2\frac{\partial N}{\partial x}$ (d) $2\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

(ix) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos 2x$ का विशेष समाकल है—

(अ) $-\frac{1}{3}\cos 2x$ (ब) $\frac{1}{3}\cos 2x$

(स) $\frac{-1}{3}\sin 2x$ (द) $\frac{1}{3}\sin 2x$

Particular Integral of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos 2x$ is :

(a) $-\frac{1}{3}\cos 2x$ (b) $\frac{1}{3}\cos 2x$

(c) $\frac{-1}{3}\sin 2x$ (d) $\frac{1}{3}\sin 2x$

(x) $y = e^{ax}$ समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ का हल होगा, यदि—

(अ) $a^2 + aP + Q = 0$ (ब) $a^2 + aQ + P = 0$

(स) $a^2 - aP + Q = 0$ (द) $a^2 - aQ + P = 0$

Solution of the equation $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ is $y = e^{ax}$, if :

(a) $a^2 + aP + Q = 0$ (b) $a^2 + aQ + P = 0$

(c) $a^2 - aP + Q = 0$ (d) $a^2 - aQ + P = 0$

खण्ड 'ब' *(Section 'B')* $5 \times 3 = 15$

लघु उत्तरीय प्रश्न

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the five questions are compulsory.*

1. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^2$, अंतराल $0 \le x \le 1$ में अवकलनीय है।

Prove that the function $f(x) = x^2$ is differentiable in interval $0 \le x \le 1$.

अथवा /Or

$2x^3 + 7x^2 + x - 1$ को $(x - 2)$ की घातों में टेलर प्रमेय से प्रसारित कीजिए।

Expand $2x^3 + 7x^2 + x - 1$ in powers of $(x - 2)$ by Taylor's theorem.

2. सिद्ध कीजिए कि वक्र $S = Ce^{x/c}$ के लिए $C\rho = S\sqrt{S^2 - C^2}$।

Prove that for the curve $S = Ce^{x/c}$ $C\rho = S\sqrt{S^2 - C^2}$.

अथवा /Or

वक्र $\dfrac{a^3}{x^3} - \dfrac{b^3}{y^3} = 1$ की समस्त अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

Find all the asymptotes of the curve $\dfrac{a^3}{x^3} - \dfrac{b^3}{y^3} = 1$.

3. सिद्ध कीजिए कि— $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$.

Prove that : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$.

अथवा /Or

वक्रों $y^2 = 4 - x$ और $y^2 = x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area bounded by the curves $y^2 = 4 - x$ and $y^2 = x$.

4. हल कीजिए— $\dfrac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$.

Solve : $\dfrac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$.

अथवा /Or

$r^n = a^n \cos n\theta$ से निरूपित वक्र कुल के लम्बकोणीय संछेदी का समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ a कुल का प्राचल है।

Find the orthogonal trajectories of the family of curves $r^n = a^n \cos n\theta$, where a is parameter of family.

5. हल कीजिए— $\dfrac{dx}{z(x+y)} = \dfrac{dy}{z(x-y)} = \dfrac{dz}{x^2+y^2}$.

Solve : $\dfrac{dx}{z(x+y)} = \dfrac{dy}{z(x-y)} = \dfrac{dz}{x^2+y^2}$.

अथवा /Or

प्राचल विचरण की विधि से अवकल समीकरण $\dfrac{d^2y}{dx^2} + ay^2 =$ cosec ax को हल कीजिए।

Solve the following differential equation by variation of parameter method :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ay^2 = \text{cosec}\, ax .$$

खण्ड 'स' (Section 'C') **5 × 5 = 25**

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी **पाँच** प्रश्न अनिवार्य हैं।

Note : *All the five questions are compulsory.*

1. यदि $y^{1/m} + y^{1/m} = 2x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$(x^2-1)\, y_2 + xy_1 - m^2 y = 0,$$

तथा $(x^2 - 1)\, y_{n+2} + (2n + 1)x\, y_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0.$

If $y^{1/m} + y^{1/m} = 2x$, then prove that :

$$(x^2 - 1)\, y_2 + xy_1 - m^2 y = 0,$$

and $(x^2 - 1)\, y_{n+2} + (2n + 1)x\, y_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0.$

अथवा /Or

टेलर प्रमेय से $\tan^{-1} x$ का $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ की घातों में ज्ञात कीजिए।

Expand $\tan^{-1} x$ in process of $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ by Taylor's theorem.

2. सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के लिए $\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}$, जहाँ p केन्द्र $(0, 0)$ से बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

Prove that for the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}$, p being the length of perpendicular from the centre $(0, 0)$ upon the tangent at the point (x, y).

अथवा /Or

वक्र $y^2 (a - x) = x^2 (a + x)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $y^2 (a - x) = x^2 (a + x)$.

3. त्रिज्या a के ठोस गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

Find the total surface of solid sphere of radius a.

अथवा /Or

दर्शाइए कि— $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$

Show that : $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$

4. हल कीजिए— $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+3}{2x-2y+5}$.

Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+3}{2x-2y+5}$.

अथवा /Or

हल कीजिए— $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x.$

Solve : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x.$

5. प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए—

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x.$$

Solve by variation of parameters method :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x.$$

अथवा /Or

हल कीजिए— $\frac{dx}{dt} - 7x + y = 0,\ \frac{dy}{dt} - 2x - 5y = 0.$

Solve : $\frac{dx}{dt} - 7x + y = 0,\ \frac{dy}{dt} - 2x - 5y = 0.$

★ ★ ★ ★ ★ c ★ ★ ★ ★ ★