

G-21-20

Roll No.....

Annual Examination, 2020

B.Sc. Part I

MATHEMATICS

Paper II

(Calculus)

Time : 3 Hours ]

[ MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ' वस्तुनिष्ठ प्रकार का तथा अनिवार्य है। उन्हें उत्तर-पुस्तिका के प्रथम पृष्ठ पर लिखा जाये। खण्ड 'ब' लघु उत्तरीय प्रकार का और खण्ड 'स' दीर्घ उत्तरीय प्रकार का है।

Note : Section 'A' is Objective type and is compulsory. It should be written on the **first page** of Answer-book. Section 'B' is Short answer type and Section 'C' is Long answer type.

खण्ड 'अ' (Section 'A')

बहुविकल्पीय प्रश्न

(Multiple Choice Questions)

सही उत्तर चुनिए—

1×10=10

Choose the correct answer :

(i) यदि

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+ax) - \log(1-bx)}{x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ k, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

एवं  $f(x)$ ,  $x = 0$  पर संतत है, तब  $k$  का मान होगा—

P.T.O.

(अ)  $a - b$  (ब)  $a + b$ (स)  $\log a + \log b$  (द) कोई नहीं।

If

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+ax) - \log(1-bx)}{x}, & \text{when } x \neq 0 \\ k, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

and  $f(x)$  is continuous at  $x = 0$ , then the value of  $k$  is :

(a)  $a - b$  (b)  $a + b$ (c)  $\log a + \log b$  (d) None is above.

(ii) फलन  $f(x)$  के मैक्लारिनस विस्तार के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध होगा—

(अ) फलन  $f(x)$  संतत होना चाहिए।(ब) फलन  $f(x)$  अवकलनीय होना चाहिए।(स) फलन  $f(x)$  का प्रत्येक बिन्दु पर अस्तित्व हो।(द) फलन  $f(x)$  संतत एवं अवकलनीय होना चाहिए।

The necessary condition for the Maclaurin's expansion to be true for function  $f(x)$  is :

(a)  $f(x)$  should be continuous(b)  $f(x)$  should be differentiable(c)  $f(x)$  should exist at every point

(d)  $f(x)$  should be continuous and differentiable.

(iii) वक्र  $x^2y^2 = a(x^2 + y^2)$  की X-अक्ष के समानान्तर अनन्तस्पर्शियाँ हैं—

(अ)  $y = \pm a$       (ब)  $y = a$

(स)  $x = a$       (द)  $x = \pm a$

The asymptotes parallel to X axis for the curve  $x^2y^2 = a(x^2 + y^2)$  will be :

(a)  $y = \pm a$       (b)  $y = a$

(c)  $x = a$       (d)  $x = \pm a$

(iv) वक्रता त्रिज्या के लिए पदिक सूत्र है—

(अ)  $\rho = r \frac{dp}{dr}$       (ब)  $\rho = r \frac{d^2r}{dp^2}$

(स)  $\rho = r \frac{dr}{dp}$       (द) कोई नहीं।

Pedal formula for radius of curvature is :

(a)  $\rho = r \frac{dp}{dr}$       (b)  $\rho = r \frac{d^2r}{dp^2}$

(c)  $\rho = r \frac{dr}{dp}$       (d) None is correct.

(v)  $\int \frac{dx}{4+5 \cos^2 x}$  का मान होगा—

(अ)  $\frac{1}{6} \tan^{-1} \left( \frac{2}{3} \tan x \right)$  (ब)  $\frac{1}{6} \tan^{-1} \left( \frac{1}{3} \tan x \right)$

(स)  $\frac{1}{3} \tan^{-1} \left( \frac{2}{3} \tan x \right)$  (द)  $\frac{1}{6} \tan^{-1} x$ .

The value of  $\int \frac{dx}{4+5 \cos^2 x}$  is :

(a)  $\frac{1}{6} \tan^{-1} \left( \frac{2}{3} \tan x \right)$  (b)  $\frac{1}{6} \tan^{-1} \left( \frac{1}{3} \tan x \right)$

(c)  $\frac{1}{3} \tan^{-1} \left( \frac{2}{3} \tan x \right)$  (d)  $\frac{1}{6} \tan^{-1} x$ .

(vi)  $\int_3^9 |x| dx$  का मान होगा—

(अ)  $\frac{9}{2}$  (ब) 9 (स)  $\frac{9}{3}$  (द)  $\frac{9}{4}$ .

The value of  $\int_3^9 |x| dx$  is :

(a)  $\frac{9}{2}$  (b) 9 (c)  $\frac{9}{3}$  (d)  $\frac{9}{4}$ .

(vii) अवकल-समीकरण  $\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$  का हल है—

(अ)  $x = cy + \sin c$  (ब)  $x = cy - \sin^{-1} c$

(स)  $y = cx - \sin^{-1} c$  (द) कोई सही नहीं।

Solution of the differential equation  $\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$  is :

(a)  $x = cy + \sin c$  (b)  $x = cy - \sin^{-1} c$

(c)  $y = cx - \sin^{-1} c$  (d) None is correct.

(viii) वक्र कुल  $y = ax^2$  की लम्बकोणीय संछेदियाँ हैं—

(अ)  $x^2 + y^2 = c^2$  (ब)  $x^2 + 2y^2 = c^2$

(स)  $y^2 - x^2 = c^2$  (द)  $x^2 - 2y^2 = c^2$ .

The orthogonal trajectories of the family of curve  $y = ax^2$  are :

(a)  $x^2 + y^2 = c^2$  (b)  $x^2 + 2y^2 = c^2$

(c)  $y^2 - x^2 = c^2$  (d)  $x^2 - 2y^2 = c^2$ .

(ix) अवकल समीकरण  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = x$  का

पूरक फलन है—

(अ)  $C_1x + C_2x^2$  (ब)  $C_1x^2 + C_2x^3$

(स)  $C_1x^3 + C_2x^4$  (द)  $x(C_1x + C_2)$ .

The complementary function of the differen-

tial equation  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = x$  is :

- (a)  $C_1x + C_2x^2$       (b)  $C_1x^2 + C_2x^3$   
 (c)  $C_1x^3 + C_2x^4$       (d)  $x(C_1x + C_2)$ .
- (x) समघात रैखिक समीकरण को हल करने के लिए हम प्रतिस्थापित करते हैं—

- (अ)  $z = \log x$       (ब)  $e^z = x$   
 (स)  $x = e^{2z}$       (द) इनमें से कोई नहीं।

For solving homogeneous linear equation we substitute :

- (a)  $z = \log x$       (b)  $e^z = x$   
 (c)  $x = e^{2z}$       (d) None of the above.

### खण्ड 'ब' (Section 'B')

लघु उत्तरीय प्रश्न 3x5=15

#### (Short Answer Type Questions)

नोट— सभी पाँच प्रश्न अनिवार्य हैं।

**Note :** All the **five** questions are compulsory.

1. निम्न फलन के बिन्दु  $x = -1$  पर सांतत्य की जाँच कीजिए—

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{when } x \neq -1 \\ -2, & \text{when } x = -1. \end{cases}$$

Test the continuity of the following function at the point  $x = -1$  :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{when } x \neq -1 \\ -2, & \text{when } x = -1. \end{cases}$$

अथवा / Or

यदि  $y = e^{\tan^{-1} x}$  हो, तो सिद्ध कीजिए—

$$(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0.$$

If  $y = e^{\tan^{-1} x}$ , then prove that :

$$(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0.$$

2. वक्र  $y^2(x^2 - a^2) = x$  की समस्त अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

Find all the asymptotes of the curve

$$y^2(x^2 - a^2) = x.$$

अथवा / Or

वक्र  $r^3 = 2ap^2$  के बिन्दु  $(p, r)$  पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the radius of curvature at the point  $(p, r)$  to the curve  $r^3 = 2ap^2$ .

3.  $\int \tan^4 x dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \tan^4 x dx$ .

अथवा / Or

दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के घन चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of positive Quadrant of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4. हल कीजिए—  $p = \log(px - y)$ .

Solve :  $p = \log(px - y)$ .

अथवा / Or

वक्र कुल  $ax^2 + y^2 = 1$  की लम्बकोणीय संछेदियाँ ज्ञात कीजिए।

Find the orthogonal trajectories of family of curve  $ax^2 + y^2 = 1$ .

5. हल कीजिए—  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{xdx}{dx} - 4y = x^2$ .



$$\text{Solve : } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{xdx}{dx} - 4y = x^2.$$

अथवा / Or

निम्न युगपत् समीकरणों को हल कीजिए—

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y, \frac{dy}{dt} = 5x + 3y.$$

Solve the following simultaneous equation :

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y, \frac{dy}{dt} = 5x + 3y.$$

खण्ड 'स' (Section 'C')

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

5×5=25

(Long Answer Type Questions)

नोट— सभी पाँच प्रश्न अनिवार्य हैं।

**Note :** All the **five** questions are compulsory.

1. फलन  $2x^3 + 7x^2 + x - 1$  का टेलर प्रमेय से  $(x - 2)$  की घातों के प्रसार कीजिए।

Expand the function  $2x^3 + 7x^2 + x - 1$  in powers of  $(x - 2)$  by Taylor theorem.

अथवा / Or

यदि  $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$  तो सिद्ध कीजिए—

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2 y_n = 0.$$

If  $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ , then prove that :

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2 y_n = 0.$$

2. सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के लिए  $\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}$ ,  
जहाँ  $p$  केन्द्र  $(0, 0)$  से बिन्दु  $(x, y)$  पर खींची गई स्पर्श रेखा पर  
डाले लंब की लम्बाई है।

Prove that for the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , radius of

curvature  $\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}$ , where  $p$  is the length of  
perpendicular from the point  $(0, 0)$  to the tangent  
at  $(x, y)$ .

अथवा / Or

वक्र  $a^2 y^2 = x^2(a^2 - x^2)$  का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve  $a^2 y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ .

3. सिद्ध कीजिए—  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$ .

Prove that :  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$ .

अथवा / Or

यदि  $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$  और  $n > 0$ , तो सिद्ध कीजिए—

$$I_n = \frac{2na^2}{(2n+1)} I_{n-1}.$$

If  $I_n = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$  and  $n > 0$ , then prove that

$$I_n = \frac{2na^2}{(2n+1)} I_{n-1}.$$

4. हल कीजिए—

$$(1 + 4xy + 2y^2)dx + (1 + 4xy + 2x^2)dy = 0.$$

Solve :

$$(1 + 4xy + 2y^2)dx + (1 + 4xy + 2x^2)dy = 0.$$

अथवा / Or

हल कीजिए—  $(D^2 - 3D + 2)y = \sin 3x$ .

Solve :  $(D^2 - 3D + 2)y = \sin 3x$ .

5. प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए—  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$ .

Solve by the method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x.$$

अथवा / Or

हल कीजिए—  $\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}.$

Solve :  $\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}.$

★ ★ ★ ★ ★ c ★ ★ ★ ★ ★